# 微分次数つき可換代数の反復巡回的ホモロジー (有限群のコホモロジー論の研究)

AUTHOR(S):

栗林, 勝彦

数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 38-45



# 微分次数つき可換代数の反復巡回的ホモロジー

岡山理科大学 栗林 勝彦 (Katsuhiko Kuribayashi)
Okayama University of Science

## 1. 序

巡回的ホモロジー (cyclic homology) をどのように一般化するか? その手段は考察する人の立場や趣味により異なり, 様々な方法が考えられる. ここで紹介する巡回的ホモロジーの一般化は, ある空間の有理係数コホモロジーとの関連を重視し行なわれる. この章ではまず, その一般化の方法を明確にするため, 巡回的ホモロジーの歴史的背景を代数的位相幾何学的立場から手短に紹介する.*

$R$ を可換環とする. Connes [5], Loday-Quillen [13] は結合的 $R$-代数 $A$ に対して Hochschild チェイン複体 (そのホモロジーが Hochschild ホモロジー $HH_*(A)$ を与える) を基に, 巡回的ホモロジー $HC_*(A)$ (巡回的コホモロジー $HC^*(A)$) を定義した. この巡回的ホモロジーは結合的 $R$-代数のカテゴリーから $R$-加群のカテゴリーへの共変函手を与えることになる. その後, Jones[10]([7], [8] も参照), Goodwillie[9] はこの函手を $R$ 上の次数つき微分代数のカテゴリー $\mathcal{DGA}/R$ から $R[u]$-加群 ($u$ の次数は 2) のカテゴリー $R[u]$-$\mathcal{M}$ への函手

$$HC_* : \mathcal{DGA}/R \to R[u]\text{-}\mathcal{M}$$

に拡張した.†

以下 $\mathcal{F}(U, X)$ を空間 $U$ から空間 $X$ への連続写像のつくる空間とする. また $\mathbb{T}$ をトーラス, $\mathbb{T}$ の $\mathcal{F}(\mathbb{T}, X)$ への作用は $f \cdot t(s) = f(ts)$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{T}, X)$, $s, t \in \mathbb{T}$ で与えられているものとする. Jones による次の定理は巡回的ホモロジーと代数的位相幾何学的対象とを関連づけた非常に重要な結果である.‡

**Theorem 1.1.** [10] $X$ を単連結空間, $C^*(X;R)$ を $X$ から得られる特異コチェイン複体とする. このとき $H^*(B\mathbb{T};R) = R[u]$-加群として巡回的ホモロジー $HC_*(C^*(X;R))$ はコホモロジー $H^*(E_\mathbb{T} \times_\mathbb{T} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X);R)$ に同型である. ただし, $H^*(E_\mathbb{T} \times_\mathbb{T} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X);R)$ 上の $R[u]$-代数構造は Borel ファイブレーション $E_\mathbb{T} \times_\mathbb{T} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X) \xrightarrow{p} B\mathbb{T}$ の射影 $p$ から誘導されている.

$R$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ である場合, $\mathcal{DGA}/\mathbb{Q}$ を微分可換代数 (以下 DGA) のつくる充満な部分カテゴリー $\mathcal{DGCA}$ に制限する. このとき巡回的ホモロジーは, 次数つき微分自由代数のカテゴリー $\mathcal{DGFCA}$ から次数つき微分 $\mathbb{Q}[u]$-代数のカテゴリー $\mathcal{DG}\mathbb{Q}[u]$-$\mathcal{A}$ へのある函手を用いて表示できることを, Burgelea, Vigué-Poirrier は示した.

**Theorem 1.2.** [4] $\mathbb{Q}[u]$-代数のつくるカテゴリーを $\mathbb{Q}[u]$-$\mathcal{A}$ と表す. また $\mathbb{Q}[u]$-微分代数のつくるカテゴリー $\mathbb{Q}[u]$-$\mathcal{DGA}$ に対してホモロジーを取ることにより得られる函手を $H : \mathbb{Q}[u]\text{-}\mathcal{DGA} \to \mathbb{Q}[u]\text{-}\mathcal{A}$ とする. このとき函手 $\mathcal{E} : \mathcal{DGFCA} \to \mathbb{Q}[u]\text{-}\mathcal{DGA}$ が存在して, 任意の $DGA(A, d)$ に対して $H \circ \mathcal{E}(\wedge V, d) \cong HC_*(A, d)$ が成り立つ. ただし $(\wedge V, d)$ は $(A, d)$ の極小モデルである.

*巡回的ホモロジーの定義から始まり, その幅広い代数的及び幾何学的応用に関しては [12] から詳しく知ることができる.

†Jones[10] が次数つき微分代数上に拡張した巡回的ホモロジーは正確には (Loday-Quillen 流には), negative cyclic homology である.

‡$R = \mathbb{Q}$ の場合この結果は, 後述 Theorem 1.3 で見るように, Burgelea, Vigué-Poirrier[16] により与えられていた.

空間 $X$ 上の多項微分形式からなる DGA $A_{PL}(X)$ (例えば [1][6] 参照) の極小モデル $(\wedge V, d) \to A_{PL}(X)$($X$ の極小モデル) をとる．このとき Burgelea, Vigué-Poirrier は函手 $\mathcal{E}$ を経由して得られる DGA, $\mathcal{E}(\wedge V, d)$ がさらに $E\mathbb{T} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X)$ の極小モデルになることを示した．

**Theorem 1.3.** [16] $X$ を単連結空間とする．$(\wedge V, d)$ を $X$ の極小モデルとする．このとき擬同型写像 (quasi-isomorphism) かつ $\mathbb{Q}[u]$-写像

$$\varphi : \mathcal{E}(\wedge V, d) \to A_{PL}(E\mathbb{T} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X))$$

が存在する．結果として誘導写像 $H(\varphi) : H \circ \mathcal{E}(\wedge V, d) \to H^*(E\mathbb{T} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X)); \mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}[u]$-代数同型写像となり，$\mathbb{Q}[u]$-加群同型

$$HC_*(A_{PL}(X)) \cong HC_*(\wedge V, d)) \cong H \circ \mathcal{E}(\wedge V, d) \cong H^*(E\mathbb{T} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X); \mathbb{Q})$$

を得る．

ここで，函手 $\mathcal{E}$ の構成方法を眺めてみる．次数つきベクトル空間 $V$ に対して，その懸垂 $s^{-1}V$ を $(s^{-1}V)^i = V^{i+1}$ で定義し，また $V \oplus s^{-1}V$ で生成される自由代数 $\wedge(V \oplus s^{-1}V)$ 上，次数 $-1$ の derivation $\beta$ を $\beta(s^{-1}v) = 0, \beta(v) = s^{-1}v$ と定める，ただし $V$ の元 $v$ に対応する $s^{-1}V$ の元を $s^{-1}v$ と表している．さらに $\wedge(V \oplus s^{-1}V)$ 上の微分 $\partial$ を $\partial|_V = d, \beta\partial + \partial\beta = 0$ をみたすように定義すると，DGA, $\mathcal{C}(\wedge V, d) = (\wedge(V \oplus s^{-1}V), \partial)$ が構成される．[§] Theorem 1.2 の函手 $\mathcal{E}$ は次で定義される:

$$\mathcal{E}(\wedge V, d) = (\wedge(V \oplus s^{-1}V) \otimes \mathbb{Q}[u], \partial + u\beta).$$

すなわち $\mathcal{E}(\wedge V, d)$ を得るために，まず $\mathcal{C}(\wedge V, d)$ を構成する自由代数と $\mathbb{Q}[u]$ のテンソル積を考え代数を拡大し，微分 $\partial$ を $\beta$ と次数 2 を持つ因子 $u$ を使って変形するのである．Theorem 1.3 は，この拡大，変形により得られる自由微分代数が実は Borel 構成 $E\mathbb{T} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}, X)$ の極小モデルであるということを主張している．

ここで巡回的ホモロジー函手を一般化する私達の手続きを述べる (詳細は Section 2 参照)．$\mathcal{E}$ の構成は，大雑把に言えば，自由ループ空間の極小モデルから始めて，上の手順でそれを拡大，変形するという方法に基づいている．そこでこの手続きを真似て私達は巡回的ホモロジー函手を一般化するのである．実際は，$l$-連結 DGA $(A, d)$ に対して，[¶] まずその極小モデル $(\wedge V, d_V)$ とモデルの幾何学的実現 $X = |(\wedge V, d_V)|$ をとる．そこで写像空間 $\mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X)$ に注目し，その極小モデルを考える．この極小モデル $(\wedge Z, \delta)$ は，Brown-Szczarba [2][3] による写像空間のモデルの作り方を実行することで具体的に記述可能である．得られるホモロジー $H(\wedge Z, \delta)$ を次数 $l$ の反復 Hochschild ホモロジーといい以下，$HH_*^{\{l\}}(A, d)$ と表そう．次に自由代数 $\wedge Z$ に $\mathbb{Q}[u]$ をテンソルして代数を拡大する．先の構成に現れた derivation $\beta$ を "自然に" に拡張し微分 $\delta$ の変形に利用する．[‖] こうして得られた微分代数が反復巡回的ホモロジー $HC_*^{\{l\}}(A, d)$ を与えるのである．$l = 1$ の場合，$HC_*^{\{1\}}(A, d) = HC_*(A, d)$ となることから，反復巡回的ホモロジーは巡回的ホモロジーの一般化といえる．

反復巡回的ホモロジーの構成方法から，Theorem 1.2 と同様に，そのホモロジーがある空間のコホモロジー環と関連付くであろうと予想される．実際，次の定理を得る．

---

[§] 実はこの DGA は $(\wedge V, d_V)$ を極小モデルに持つ単連結空間 $X$ の自由ループ空間 $LX = \mathcal{F}(\mathbb{T}, X)$ の極小モデルであることが知られている ([17])．

[¶] DGA $(A, d)$ が $A^0 = \mathbb{Q}$, $A^i = 0$ $(i < 0)$ かつ $H^i(A, d) = 0$ $(0 < i \leq l)$ をみたすときその DGA を $l$-連結であるという．

[‖] 自然な拡張が再び微分になっていること，そして符号を除いて $\delta$ と可換であることが，実は巡回的ホモロジーを一般化する動機付けとなった (Proposition 2.2 参照)．

**Theorem 1.4.** [11, Theorem 1.2] $X$ は $l$-連結空間であり, 任意の整数 $i$ に対して $\dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ をみたすものとする. またトーラス $\mathbb{T}$ の $\mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X)$ への作用を $(f \cdot a)(t_1, ..., t_l) = f(at_1, ..., at_l)$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X)$, $a \in \mathbb{T}$, $(t_1, ..., t_l) \in \mathbb{T}^l$ で定義する. このとき, $\mathbb{Q}[u]$-代数としての同型対応

$$HC_*^{\{l\}}(A_{PL}(X)) \cong H^*(E_{\mathbb{T}} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X); \mathbb{Q})$$

が存在する. ここでコホモロジー環 $H^*(E_{\mathbb{T}} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X); \mathbb{Q})$ 上の $\mathbb{Q}[u]$-代数構造は Borel ファイブレーション $\mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X) \to E_{\mathbb{T}} \times_{\mathbb{T}} \mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X) \xrightarrow{p} B\mathbb{T}$ の射影 $p$ から誘導されている.

この定理は Theorem 1.2 の証明方法を, 反復次数 $l$ に関する帰納法にうまく組み込ことにより証明されている. ここで強調したいことは, 代数的に一般化された derivation $\beta$ を用いて, $\mathcal{F}(\mathbb{T}^l, X)$ のトーラス作用のモデルは記述されるという結果 [11, Proposition 6.5] が Theorem 1.4 の証明を完成させるための鍵となっているという点である.**

反復 Hochschild ホモロジー, 反復巡回的ホモロジーの代数的性質で重要なものの一つとして, ここでは次の定理を上げておく.

**Theorem 1.5.** [11, Theorem 1.3] 任意の整数 $l \geq 2$ 及び $H^*(A, d) \neq \mathbb{Q}$ をみたす任意の $l$-連結 $DGA$ $(A, d)$ に対して, 数列 $\{\dim HC_i^{\{l\}}(A, d)\}_{i \geq 0}$ と $\{\dim HH_i^{\{l\}}(A, d)\}_{i \geq 0}$ はいずれも非有界である.

$l = 1$ の場合 $\{\dim HC_i(A, d)\}_{i \geq 0}$ が非有界であるための必要かつ十分条件は $H^*(A, d)$ が2元以上の代数としての生成元をもつことである ([16, Corollary 2]). また Hochschild ホモロジーに関していえば, $\{\dim HH_i(A, d)\}_{i \geq 0}$ も同様の性質を持つ ([17]). したがって Theorem 1.5 は反復巡回的ホモロジーと通常の巡回的ホモロジーとの相違点を明らかにしている. 結果として $H^*(A, d)$ が一変数の多元環であったとしてもその反復 Hochschild ホモロジー, 反復巡回的ホモロジーはベクトル空間の次元に関して, 次数による周期性をもたないことがわかる.

以下この稿では反復巡回的ホモロジーを函手として正確に定義し, さらに上述の Theorem 1.5 を証明する上で重要な役割を果たす自然変換 $HC_*^{\{l\}} \to HC_{*-1}^{\{l+1\}}$ を紹介する. 引用なしに述べられている定理, 命題, 補題の証明は [11, Section 4] を見て頂きたい.

## 2. 反復巡回的ホモロジーの定義

この章では, 次数つき微分代数のカテゴリーを定義域として持つ, 巡回的ホモロジー函手を定義する. まず自由微分代数のカテゴリー上の函手としてそれを定義しよう.

連結自由 DGA $(A, d_A) = (\wedge V, d_A)$ と連結 DGA $(B, d_B)$ をとる. $B_q = \mathrm{Hom}(B^{-q}, \mathbb{Q})$ $(q \leq 0)$ と定義し, $(B_*, d_{B*})$ を $B$ の積の双対 $D$ を余積, $d_B$ の双対 $d_{B*}$ を微分として持つ微分余代数とする. 次に $I$ を自由代数 $\mathbb{Q}[\wedge V \otimes B_*]$ の $1 \otimes 1 - 1$ 及び次の形を持

**Brown-Szczarba[2] による写像空間のモデルは Lannes' division functor の実現として与えられ, その微分は比較的理解しやすい. しかし評価写像 $\mathcal{F}(X, Y) \times X \to Y$ の代数的モデルの Brown-Szczarba モデルによる実現はまだ一般には行なわれていないようである. [11] では $X$ の有理ホモトピー型が奇数次元球面の直積である場合, その評価写像のモデルを Brown-Szczarba モデルで書き表した. これがトーラス作用のモデルの実現に貢献している.

つ元全体から生成されるイデアルとする:

$$a_1a_2\otimes\beta-\sum_i(-1)^{|a_2||\beta_i'|}(a_1\otimes\beta_i')(a_2\otimes\beta_i'').$$

ここで $a_1,a_2\in\wedge V$, $\beta\in B_*$, $D(\beta)=\sum_i\beta_i'\otimes\beta_i''$ である. $\mathbb{Q}[\wedge V\otimes B_*]$ は微分 $d:=d_A\otimes 1\pm 1\otimes d_{B*}$ をもつ DGA であることに注意する. このとき次が成り立つ.

**Theorem 2.1.** [2, Theorems 3.3, 3.5] (i) $(d_A\otimes 1\pm 1\otimes d_{B*})(I)\subset I$.
(ii) 合成

$$\rho:\mathbb{Q}[V\otimes B_*]\hookrightarrow\mathbb{Q}[\wedge V\otimes B_*]\to\mathbb{Q}[\wedge V\otimes B_*]/I$$

は次数付き代数の同型写像である.

この定理から, 微分 $d$ は $\mathbb{Q}[\wedge V\otimes B_*]/I$ 上の微分 $\tilde{d}$ 誘導し, それは $\mathbb{Q}[V\otimes B_*]$ 上の微分 $\delta=\rho^{-1}\tilde{d}\rho$ を引き起こすことがわかる.

さて自明な微分 $d_B\equiv 0$ を持った DGA, $B=\wedge(t_1,\ldots,t_l)$ を考える, ただし任意の $i$ に対して $|t_i|=1$ であるとする. $B$ の基底 $\{t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l}\}$ に対して, その双対基底を $\{(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*\}$ としよう. 自由代数 $A$ の生成元 $v$ に対して $d_A(v)=v_1\cdots v_m$ であるとき, 先に定義された $\mathbb{Q}[V\otimes B_*]$ 上の微分 $\delta$ は次の形式で与えられることが容易にわかる:

$$\begin{aligned}\delta(v\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*) &= \textstyle\sum_J(-1)^{\varepsilon(J)}v_1\cdots v_m\cdot T_{J_1*}\otimes\cdots\otimes T_{J_m*}\\ &= \textstyle\sum_J(-1)^{\varepsilon(J)+\varepsilon(v_1,\ldots,v_m,T_{J_1*},\ldots,T_{J_m*})}v_1\otimes T_{J_1*}\cdots v_m\otimes T_{J_m*},\end{aligned}$$

ただし反復余積 $D^{(m-1)}$ を使って, $D^{(m-1)}((t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*)=\sum_J(-1)^{\varepsilon(J)}T_{J_1*}\otimes\cdots\otimes T_{J_m*}$, また $\varepsilon(v_1,\ldots,v_m,T_{J_1*},\ldots,T_{J_m*})$ は次数つき代数 $(\wedge V)\otimes B$ において

$$(-1)^{\varepsilon(v_1,\ldots,v_m,T_{J_1},\ldots,T_{J_m})}v_1T_{J_1}\cdots v_mT_{J_m}=v_1\cdots v_mT_{J_1}\cdots T_{J_m}$$

をみたすように定義されている. 得られた微分 $\delta$ を用いてチェイン複体 $(\mathcal{C}^{\{l\}}(\wedge V),\delta_l)=(\mathbb{Q}[V\otimes B_*],\delta)$ を定め, このホモロジーを $(\wedge V,d)$ の反復 Hochschild ホモロジーという. 以下このホモロジーを $HH_*^{\{l\}}(\wedge V,d)$ で表すことにする.

第1章で述べたように, 私達はこのチェイン複体 $(\mathcal{C}^{\{l\}}(\wedge V),\delta_l)$ を次数 $-1$ の derivation $\beta:\mathbb{Q}[V\otimes B_*]\to\mathbb{Q}[V\otimes H_*]$ を用いて変形する. まず $\beta$ を次で定義しよう:

$$\beta(v\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*)=\sum_k(-1)^{|v|+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}v\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_k^{\varepsilon_k+1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*.$$

このとき直接計算により, 次の命題を得る.

**Proposition 2.2.** $\beta^2=0$ でありかつ $\delta\beta+\beta\delta=0$.

こうして $(\mathcal{C}^{\{l\}}(\wedge V),\delta_l)$ を変形して, $\mathbb{Q}[u]$-DGA

$$(\mathcal{E}^{\{l\}}(\wedge V),\mathcal{D}_l)=(\mathcal{C}^{\{l\}}(\wedge V)\otimes\mathbb{Q}[u],\delta+u\beta)$$

を手に入れることが出来る. このホモロジーを $(\wedge V,d)$ の反復巡回的ホモロジーと呼び, 以下 $HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d)$ で表すことにする. またこのホモロジーは $\mathbb{Q}[u]$-代数構造を $(\mathcal{E}^{\{l\}}(\wedge V),\mathcal{D}_l)$ から受け継ぐことに注意する.

DGA$(A,d)$ の2つの極小モデル $m_V:(\wedge V,d)\to(A,d)$ と $m_W:(\wedge W,d)\to(A,d)$ を考える. 任意の元 $x\in HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d)$ と $y\in HC_*^{\{l\}}(\wedge W,d)$ に対して同型写像 $\varphi_{VW}$ :

$(\wedge V,d) \to (\wedge W,d)$ があって図式

$$\begin{tikzcd} & (A,d) & \\ (\wedge V,d) \arrow[ur, "m_V"] \arrow[rr, "\varphi_{VW}"'] & & (\wedge W,d) \arrow[ul, "m_W"'] \end{tikzcd}$$

がホモトピー可換さらに, $H(\mathcal{E}(\varphi_{VW}))(x) = y$ が成り立つとき, $x \sim y$ と書くことにする. 上の三角図式をホモトピー可換にする同型写像 $\varphi_{VW}$ はホモトピーを除いて一意に定まることが知られているから関係 $\sim$ は同値関係になる.

DGA$(A,d)$ の反復次数 $l$ の反復巡回的ホモロジー $HC_*^{\{l\}}(A,d)$ を次で定義する:

$$HC_*^{\{l\}}(A,d) := \coprod_{\mathcal{M}_A \ni m_V:(\wedge V,d)\to(A,d)} HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d)/\sim$$

ここで $\mathcal{M}_A$ は $(A,d)$ の極小モデル全体からなる集合である. 先の同値関係からすぐ分かるように, 任意の極小モデル $m_V : (\wedge V,d) \to (A,d)$ に対して包含写像 $HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d) \hookrightarrow \coprod_{\mathcal{M}_A \ni m_V:(\wedge V,d)\to(A,d)} HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d)$ は全単射

$$\eta_{m_V} : HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d) \to HC_*^{\{l\}}(A,d)$$

を誘導する. そこで $HC_*^{\{l\}}(A,d)$ の $\mathbb{Q}[u]$-代数構造を $\eta_{m_V}$ が同型になるように定める. もう一つ他の極小モデル $m_W : (\wedge W,d) \to (A,d)$ を取るとき, 上の同型写像 $\varphi_{VW}$ をとることにより, 可換図式

$$\begin{tikzcd} & HC_*^{\{l\}}(A,d) & \\ HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d) \arrow[ur, "\eta_{m_V}"] \arrow[rr, "H(\mathcal{E}(\varphi_{VW}))"'] & & HC_*^{\{l\}}(\wedge W,d). \arrow[ul, "\eta_{m_W}"'] \end{tikzcd}$$

を得る. 従って $HC_*^{\{l\}}(A,d)$ 上に定義される $\mathbb{Q}[u]$-代数構造は極小モデルの取り方に依らないことがわかる. 同様に自由 DGA の反復 Hochschild ホモロジーを用いて, 一般の DGA$(A,d)$ に対し反復 Hochschild ホモロジー $HH_*^{\{l\}}(A,d)$ を定義することができる.

この反復巡回的ホモロジー, 反復 Hochschild を函手として見るために次の lemma が必要になる.

**Lemma 2.3.** $\varphi_0,\ \varphi_1 : (\wedge V,d) \to (\wedge W,d)$ を自由 *DGA's* の間の *DGA* 写像とする. もし $\varphi_0$ が $\varphi_1$ にホモトピックならば, $H(\mathcal{C}(\varphi_0)) = H(\mathcal{C}(\varphi_1))$ かつ $H(\mathcal{E}(\varphi_0)) = H(\mathcal{E}(\varphi_1))$.

次に DGA 写像から誘導される反復巡回的ホモロジーの間の $\mathbb{Q}[u]$-代数写像を定義しよう. $\varphi : (A,d_A) \to (B,d_B)$ を DGA 写像とし $\widetilde{\varphi_i} : (\wedge V_i, d_i) \to (\wedge W_i, d_i')$ $(i=1,2)$ を $\varphi$ の (2 つ) のモデルとする. DGA 同型写像 $\varphi_{V_1V_2} : (\wedge V_1,d_1) \xrightarrow{\cong} (\wedge V_2,d_2)$ 及び $\varphi_{W_1W_2} : (\wedge W_1,d_1') \xrightarrow{\cong} (\wedge W_2,d_2')$ で $\widetilde{\varphi_2}\varphi_{V_1V_2} \sim \varphi_{W_1W_2}\widetilde{\varphi_1}$ をみたすものが存在するから, 先の Lemma 2.3 から $H(\mathcal{E}(\varphi_{W_1W_2}))H(\mathcal{E}(\widetilde{\varphi_1})) = H(\mathcal{E}(\widetilde{\varphi_2}))H(\mathcal{E}(\varphi_{V_1V_2}))$ と結論することができる. こうして写像 $HC(\varphi) : HC_*^{\{l\}}(A,d_A) \to HC_*^{\{l\}}(B,d_B)$ を $x \in HC_*^{\{l\}}(\wedge V_1,d_1)$ に対して, $HC(\varphi)(x) = H(\mathcal{E}(\widetilde{\varphi_1}))(x)$ と定めることができる. 得られた写像 $HC(\varphi)$ が $\mathbb{Q}[u]$-代数の射であることは定義より明らかである.

反復 Hochschild ホモロジーについても同様に, DGA 写像 $\varphi:(A,d_A)\to(B,d_B)$ から環準同型 $HH(\varphi):HH_*^{\{l\}}(A,d_A)\to HH_*^{\{l\}}(B,d_B)$ を定義することができる.

連結可換 DGA のつくるカテゴリーを $\mathcal{DGCA}$, $\mathbb{Q}$-代数のつくるカテゴリーを $\mathcal{A}$ と表す. また $\mathbb{Q}[u]$-代数のつくるカテゴリーを $\mathbb{Q}[u]$-$\mathcal{A}$ としよう. Lemma 2.3 を適用して, 私達は目標であった結果に行きつく.

**Theorem 2.4.** 反復巡回的ホモロジー, 巡回的 *Hochschild* ホモロジーはそれぞれ共変函手 $HC_*^{\{l\}}:\mathcal{DGCA}\to\mathbb{Q}[u]$-$\mathcal{A}$, $HH_*^{\{l\}}:\mathcal{DGCA}\to\mathcal{A}$ を定義する.

*Remark* 2.5. 定義より明らかに $HC_*^{\{1\}}=HC_*$ である. また, 与えられた DGA$(A,d)$ が $l$-連結でなければ, 一般に反復巡回的ホモロジー $HC^{\{l\}}(A,d)$ は連結ではない (負次数を持った元も許す).

## 3. $HC_*^{\{l\}}$ から $HC_{*-1}^{\{l+1\}}$ への自然変換

まず反復巡回的ホモロジー, 巡回的 Hochschild ホモロジーからなる Connes 完全系列から紹介する.

$(\wedge V,d)$ を連結 DGA とするとき, 次の短完全列が存在することがわかる.

$$0\longleftarrow \mathcal{C}_*^{\{l\}}(\wedge V)\xleftarrow{\pi}\mathcal{E}_*^{\{l\}}(\wedge V)\xleftarrow{i}\mathcal{E}_{*-2}^{\{l\}}(\wedge V)\longleftarrow 0$$

ただし $i\left(\sum_{i\geq0}w_iu^i\right)=\sum_{i\geq0}w_iu^{i+1}$, $\pi\left(\sum_{i\geq0}w_iu^i\right)=w_0\ (w_i\in\mathcal{C}_*^{\{l\}}(\wedge V))$ と定義されている. この短完全列は Connes 完全系列

$$\cdots\leftarrow HC_{*-1}^{\{l\}}(\wedge V,d)\xleftarrow{B}HH_*^{\{l\}}(\wedge V,d)\xleftarrow{\tilde\pi}HC_*^{\{l\}}(\wedge V,d)\xleftarrow{S}HC_{*-2}^{\{l\}}(\wedge V,d)\leftarrow\cdots.$$

を誘導する. $w\in\mathcal{C}_*^{\{l\}}(\wedge V)$ に対して $B([w])=[\beta w]$ であることに注意されたい. また Connes 完全系列上の写像 $B$, $\tilde\pi$ そして $S$ は自由 DGA's の間の DGA 写像に関して自然であるから上の $(\wedge V,d)$ は任意の連結 DGA $(A,d)$ に置き換えられる. さらに $B:HH_*^{\{l\}}\to HC_{*-1}^{\{l\}}$, $\tilde\pi:HC_*^{\{l\}}\to HH_*^{\{l\}}$ そして $S:HC_{*-2}^{\{l\}}\to HC_*^{\{l\}}$ なる自然変換を手に入れることができる.

自然変換 $HC_*^{\{l\}}\to HC_{*-1}^{\{l+1\}}$ を定義する. まず, $B_s$ を外積代数 $\wedge(t_1,\ldots,t_s)$ とし, さらに次数 $-1$ の derivation $\tau:\mathbb{Q}[\wedge V\otimes B_{l*}]\to\mathbb{Q}[\wedge V\otimes B_{l+1*}]$ を $a\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*\in\wedge V\otimes B_{l*}$ に対して,

$$\tau(a\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*)=(-1)^{|a|+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_l}a\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l}t_{l+1})_*$$

と定める. このとき次が成り立つ.

**Lemma 3.1.** (i) $(d\otimes1)\circ\tau=-\tau\circ(d\otimes1)$.
(ii) $\tau(I)\subset I$, ただし $I$ は *Theorem 2.1* の前で定義されているイデアルである.

Lemma 3.1 から derivation $\mathcal{C}(\tau)=\rho^{-1}\tau\rho:\mathcal{C}_i^{\{l\}}(\wedge V)\to\mathcal{C}_{i-1}^{\{l+1\}}(\wedge V)$ が定義でき, それは条件 $\mathcal{C}(\tau)\delta_l=-\delta_{l+1}\mathcal{C}(\tau)$ をみたす. 特に $v\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*\in V\otimes B_{l*}$ に対して, $\mathcal{C}(\tau)(v\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l})_*)=(-1)^{|v|+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_l}v\otimes(t_1^{\varepsilon_1}\cdots t_l^{\varepsilon_l}t_{l+1})_*$ である.

ここで derivation $\mathcal{E}(\tau):\mathcal{E}_i^{\{l\}}(\wedge V)\to\mathcal{E}_{i-1}^{\{l+1\}}(\wedge V)$ を $\mathcal{E}(\tau)|_{\mathcal{C}_i^{\{l\}}(\wedge V)}=\mathcal{C}(\tau)$, $\mathcal{E}(\tau)(u)=0$ と定める. $\beta\mathcal{E}(\tau)=-\mathcal{E}(\tau)\beta$ をみたすことは容易に確かめられるから, $\mathcal{D}_{l+1}\mathcal{E}(\tau)=-\mathcal{E}(\tau)\mathcal{D}_l$ となる. さらに, $\mathcal{C}(\tau)$ 及び $\mathcal{E}(\tau)$ の自然性から, 上の複体写像 $\mathcal{C}(\tau)$, $\mathcal{E}(\tau)$ は自然変換 $\tau_{HH}:HH_*^{\{l\}}\to HH_{*-1}^{\{l+1\}}$ と $\tau_{HC}:HC_*^{\{l\}}\to HC_{*-1}^{\{l+1\}}$ を誘導することがわかる. 次の定理はこの自然変換と Connes 完全列の相性の良さを物語る.

**Theorem 3.2.** 図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longleftarrow & \mathcal{C}_*^{\{l\}}(\wedge V) & \xleftarrow{\pi} & \mathcal{E}_*^{\{l\}}(\wedge V) & \xleftarrow{i} & \mathcal{E}_{*-2}^{\{l\}}(\wedge V) & \longleftarrow 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}(\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}(\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}(\tau)} & \\ 0 \longleftarrow & \mathcal{C}_*^{\{l+1\}}(\wedge V) & \xleftarrow{\pi} & \mathcal{E}_*^{\{l+1\}}(\wedge V) & \xleftarrow{i} & \mathcal{E}_{*-2}^{\{l+1\}}(\wedge V) & \longleftarrow 0 \end{array}$$

は可換である．したがって自然変換として次の等式が成立する:

$$\tau_{HC}B = B\tau_{HH}, \quad \tau_{HH}\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}\tau_{HC}, \quad \tau_{HC}S = S\tau_{HC}.$$

## 4. 結び

第1章で見たように $HC_*^{\{l+1\}}(A,d)$ は一般に負次数の元を持つ．この元が与える代数的または幾何学的情報について，また全体的な代数構造の解析について知られている結果は現在皆無である．残念ながら $l$-連結 DGA に対しても，反復次数 $l(\geq 2)$ の反復巡回的ホモロジーの具体的計算はまだ実行されていない．今後，具体的な DGA に対して行なわれる反復巡回的ホモロジー，反復 Hochschild ホモロジーの計算を通して，Theorem 1.5 と同様，通常の Hochschild，巡回的ホモロジーとの相違点が明らかにされるであろう．また共変函手 $HC_* = HC_*^{\{1\}} \to HC_{*-1}^{\{2\}} \to \cdots \to HC_{*-l}^{\{l+1\}}$ は通常巡回的ホモロジーの研究に貢献するのではないかと予想する．

今まで見て来たように，私達の得た反復巡回的ホモロジーは有理数体上の可換微分代数上でのみ定義されている．環 $R$ 上の一般の微分代数 (可換とは限らない) に関しての一般化は [11] では与えていない．そのような一般化が，棒構成等を基にやがてなされること，そしてそれが Theorem 1.1 のようにある空間のホモロジーと結び付くことを期待する．この方面での Hochschild ホモロジーの一般化に関しては [14], [15] を参照．

## References


[1] A. K. Bousfield and V. K. A. M. Gugenheim, On PL de Rham theory and rational homotopy type, Memoirs of AMS **179**(1976).

[2] E. H. Brown Jr and R. H. Szczarba, Rational homotopy type of function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **349**(1997), 4931-4951.

[3] E. H. Brown Jr and R. H. Szczarba, Real and Rational Homotopy Theory, in: I.M.James (Ed.), Handbook of Algebraic Topology, Elsevier, Amsterdam, 1995, pp. 867-915.

[4] D. Burghelea and M. Vigué-Poirrier, Cyclic Homology of Commutative algebras I, LNM 1318, Springer-Verlag, New York, 51-72.

[5] A. Connes, Non commutative differential geometry Part I, II, Publ. Math. Inst. Haustes Etud. Soc. **62**(1985), 41-93, 94-144.

[6] Y. Félix, S. Halperin and J. -C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics **205**, Springer-Verlag.

[7] E. Getzler and J. D. S. Jones, $A_\infty$- algebras and cyclic bar complex, Illinois J. Math. **34, 2**(1990), 256-283.

[8] E. Getzler, J. D. S. Jones and S. Petrack, Differential form on loop spaces and the cyclic bar complex, Topology, **30,3**(1991), 339-371.

[9] T. G. Goodwillie, Cyclic homology, derivations and the free loopspace, Topology **24**(1985), 187-215.

[10] J. D. S. Jones, Cyclic homology and equivariant homology, Invent. Math. **87**(1987), 403-423.

[11] K. Kuribayashi, Rational model for the evaluation map and iterated cyclic homology, preprint (2003). `http://omega.geom.xi.xmath.ous.ac.jp/kuri/dvi/ev-iterated.dvi`

[12] J. L. Loday, Cyclic homology, G.M.W. **301**(1992), Springer-Verlag.

[13] J. L. Loday and D. Quillen, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, Comment. Math. Helv. **59**(1984), 565-591.

[14] F. Patras, Generic algebras and iterated Hochschild homology, J. Pure Appl. Algebra **162**(2001), 337–357.

[15] T. Pirashvili, Hodge decomposition for higher order Hochschild homology, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33**(2000), 151–179.

[16] M. Vigué-Poirrier and D. Burghelea, A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected spaces, J. Differential Geometry **22**(1985), 243-253.

[17] M. Vigué-Poirrier and D. Sullivan, The homology theory of the closed geodesic problem, J. Differential Geometry **11**(1976), 633-644.